

南京理工大学

2018 年硕士学位研究生入学考试试题

科目代码: 611 科目名称: 数学(单) 满分: 150 分

注意: ①认真阅读答题纸上的注意事项; ②所有答案必须写在答题纸上, 写在本题纸或草稿纸上均无效; ③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回!

一、填空题(每题 5 分, 共 40 分):

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{3n+1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 曲线 $y = \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2-1}}$ 的斜渐近线方程是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

3. 微分方程 $(3y-2x)dy = ydx$ 的通解是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

4. 已知 $f(x) = (1+x+x^2)e^{\sin x}$, 则 $f''(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

5. 设三阶实对称矩阵 A 相似于矩阵 $\begin{bmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, λ 是实数, 若 $A^2 + A + \lambda E$ 是

正定矩阵, 其中 E 是单位矩阵, 则 λ 应满足的条件是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

6. 已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 和 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 都是 4 维实向量, 其中向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的秩是 2, 向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 的秩大于 1, 并且每个 β_i 与 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 都正交, 则向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 的秩是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

7. 设 $f(x, y)$ 有一阶连续的偏导数, 且 $f(x, y)(ydx + xdy)$ 为某一函数 $u(x, y)$ 的全微分, 则 $f(x, y)$ 应满足的条件是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

8. 函数 $f(x) = \frac{1}{3+4x}$ 展开为 $(x+2)$ 的幂级数是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

二、计算题(每题 6 分, 共 30 分):

1. $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}}$.

2. $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)dx}{(2-x)^2}$.

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

4. 设 $y = y(x)$ 是由 $x^2 - xy + y^2 = \sin x + \frac{1}{2}$ 所确定的隐函数, 求 $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$.

5. 计算 $\iint_D x^2 y dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x, x^2 + y^2 \geq 2x\}$.

三、计算题(10 分) 求方程 $yy'' - 2yy' \ln y = (y')^2$ 满足初始条件 $y(0) = 1, y'(0) = 1$ 的特解.

四、计算题(8 分) 曲线 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 (x > 0, y > 0)$ 的切线与两坐标轴围成一个三角形, 问切点在何处时三角形的面积最大.

五、计算题(10 分) 修建一个容积为 V 的长方体地下仓库, 已知仓顶和墙壁每单位面积造价分别是地面每单位面积造价的 3 倍和 2 倍, 问如何设计仓库的长、宽和高, 可使它的造价最小.

六、计算题(10 分) 三重积分 $\iiint_{\Omega} z \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dV$, 其中 Ω 是由曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 与 $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$ 所围成的区域.

七、计算题(10 分) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, 试判断并说

明 A 与 B 是否相似.

八、计算题(10 分)

(1) 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $g(x) > 0$, 则至少存在一点 $\xi \in [a, b]$ 使得:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx.$$

(2) 试求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

九、计算题(12 分) 设向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ a \\ 4 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 17 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$,

(1) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 求 a 的值;

(2) 当 $a = 3$ 时, 求与 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 都正交的非零向量 α_4 。

十、计算题 (10 分) 已知极坐标曲线 $\Gamma: \rho = 1 + \cos \varphi (0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2})$, 求该曲线在 $\varphi = \frac{\pi}{4}$ 所对应点处的切线 L 的直角坐标方程, 并求曲线 Γ 和 L 及 x 轴所围成平面图形的面积。