南京理工大学

2018 年硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：616　　科目名称：数学分析　　满分：150 分

注意：①认真阅读答题纸上的注意事项；②所有答案必须写在$\boxed{\text{答题纸}}$上，写在本试题纸或草稿纸上均无效；③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回！

一 （满分 15 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1^2}{n^4}+\frac{1^2+2^2}{n^4}+\cdots+\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^4})$；

2. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}[1+x+\frac{f(x)}{x}]^{\frac{1}{x}}=e^2$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}$.

二（满分 15 分）

1. 设 $y=y(x)$ 是由 $x-\int_1^{y+x}e^{-t^2}dt=0$ 所确定的隐函数，求 $y''(0)$；

2. 设 $a>0,b>0$, 证明：$2ab\le e^{a-1}+a\ln a+e^{b-1}+b\ln b$.

三（满分 15 分）

1. 求 $\int\frac{e^x(1+x)}{1-xe^x}dx$；

2. 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}x\int_x^1\frac{\cos t}{t^2}dt$.

四 （满分 15 分）给出 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 的极限不存在的 $\varepsilon-\delta$ 语言的正面陈述，并证明 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在.

五（满分 15 分）

设函数 $f(x)$ 具有一阶连续导数，L 是上半平面（$y>0$）内的有向分段光滑曲线，其起点为 (a,b)，终点为 (c,d)，记

$$I=\int_L\frac{1}{y}[1+y^2f(xy)]dx+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]dy.$$

（1）证明 I 与 L 无关；（2）当 $ab=cd$ 时，求 I 的值.

六（满分 15 分）

1. 证明 广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 是收敛的.

2. 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}(z+1)^2dxdy$，其中 Σ 为曲面 $z=x^2+y^2$ 关于平面 $z=1$ 与 $z=2$ 之间的那部分的下侧.

七（满分 15 分）

设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某个邻域内有连续的导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=a>0$，证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(\frac{1}{n})$ 发散，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^nf(\frac{1}{n})$ 条件收敛.

八（满分 15 分）

证明 （1）$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xy)}{y}dy$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 中不一致收敛；

（2）$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xy)}{y}dy$ 在 $x\in[\delta,+\infty)$ 中一致收敛（$\delta>0$）.

九（满分 15 分）

计算 $f(a)=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\cos(2ax)dx$，（$-\infty<a<+\infty$），（注：$f(0)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$）.

十（满分 15 分）

运用有限覆盖定理证明：闭区间上的连续函数必在该区间上一致连续.