南京理工大学
2018年硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：840　　科目名称：高等代数　　满分：150分

注意：(1) 认真阅读答题纸上的注意事项；(2) 所有答案必须写在答题纸上，写在本试题纸或草稿纸上均无效；(3) 本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回！

一．填空题 (本题共10小题，每小题5分，共50分)

1. 若$(x^2+x-1)|(x^3+px+q)$，则$p+q=$______.

2. 已知$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=1$，则$\begin{vmatrix} 4x & 2x-3y & z \\ 12 & 6 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}=$______.

3. 已知将3阶可逆方阵A的第2行的2倍加到第3行得到矩阵B，则$AB^{-1}=$______.

4. 已知方程组$\begin{cases} x_1-\lambda x_2-x_3=0 \\ x_1+x_2+\lambda x_3=0 \end{cases}$与方程$x_1-\lambda x_2+x_3=1$具有唯一的公共解，则$\lambda$应满足的条件是______.

5. 设A是n阶方阵，α,β是两个互异的n维列向量，且$A\alpha=\beta, A\beta=\alpha$，则$A$必有特征值______.

6. 若二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2-2tx_1x_2-2tx_1x_3-2tx_2x_3$正定，则实数$t$的取值范围是______.

7. 设V与V'是两个线性空间，且$V\cong V'$，其中$V'=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)|\ a_1+a_2+\cdots+a_n=0,\ a_i\in\mathbb{R}\}$，则$\dim(V)=$______.

8. 已知$A^*=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则$A=$______.

9. 设A为$n(\geq 4)$阶实对称矩阵，且$A^2=A$，$\mathrm{rank}(A)=n-3$，则$|2E-A|=$______.

10. 在$\mathbb{R}^3$中定义如下双线性函数：$f(X,Y)=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$，$X,Y\in\mathbb{R}^3$，则$f(X,Y)$在基$\varepsilon_1=(1,0,0),\varepsilon_2=(0,1,0),\varepsilon_3=(0,0,1)$下的度量矩阵为______.

二. (本题满分15分) 设$f(x)\in\mathbb{Z}[x]$，且$\deg(f(x))>0$. 证明：如果$2+\sqrt{3}$是$f(x)$的根，则$2-\sqrt{3}$也是$f(x)$的根.

三. (本题满分15分) 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$是$m$个向量$(m>1)$，且$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m$. 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关，问$\beta-\alpha_1,\beta-\alpha_2,\cdots,\beta-\alpha_m$是否线性无关？请给出理由.

四. (本题满分15分) 设$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$是一个4阶方阵，若方程组$AX=\beta$的通解为$(1,-1,2,1)^T+k_1(1,2,0,1)^T+k_2(-1,1,1,0)^T$ (k_1,k_2为任意常数).

(I) 证明：α_1,α_2线性无关；

(II) 令$B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，求方程组$BX=\beta$的通解.

五. (本题满分15分) 已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$在正交变换$X=QY$下的标准形为$y_1^2+y_2^2$，且Q的第3列为$(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2})^T$.

(I) 求A的特征值与特征向量；

(II) 求A.

六. (本题满分15分) 设V_1是由$\alpha_1=(1,0,-1,1)^T,\alpha_2=(1,0,1,-1)^T,\alpha_3=(1,1,1,0)^T$生成的子空间，$V_2$是由$\beta_1=(1,1,0,1)^T,\beta_2=(-1,0,1,a-1)^T$生成的子空间. 若$\dim(V_1+V_2)=3$，求$a$的值，并求此时$V_1+V_2$的一组基.

七. (本题满分15分) 设$A=(a_{ij})\in P^{2\times 2}$，在$P^{2\times 2}$上定义如下双线性函数

$$f(X,Y)=\mathrm{tr}(X^TAY)，对于任意的X,Y\in P^{2\times 2}.$$

(1) 求$f(X,Y)$在基$E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$下的度量矩阵($E_{ij}$表示矩阵单位).

(2) 问$f(X,Y)$是否退化？为什么？

八. (本题满分10分) 设$\mathcal{A}$是P^4中的线性变换，且$\mathcal{A}$在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$下的矩阵为$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. 证明：$W=L(\varepsilon_1+\varepsilon_2,\varepsilon_1+\varepsilon_3,\varepsilon_1+\varepsilon_4)$是$P^4$的$\mathcal{A}$-子空间.