南京理工大学

2016 年硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：615　　科目名称：高等数学　　满分：150 分

注意：①认真阅读答题纸上的注意事项；②所有答案必须写在答题纸上，写在本试题纸或草稿纸上均无效；③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回！

一、　选择题（本题满分 28 分，每小题 4 分）

（1）　$x=1$ 是函数 $y=\dfrac{x-x^2}{\sin \pi x}$ 的（　　）；

（A）连续点；（B）可去间断点；（C）跳跃间断点；（D）第二类间断点.

（2）设 $f(x)=\left|x^3-1\right|\varphi(x)$，且 $\varphi(x)$ 在 x=1 处连续，则 $\varphi(1)=0$ 是 f(x) 在 x=1 处可导的（）;

（A）充分条件；　　（B）必要条件；

（C）充要条件；　　（D）既不充分也不必要条件.

（3）　$\int_{-2}^{2}\dfrac{1}{(1+x)^2}dx=$（　　）

（A）$-\dfrac{4}{3}$；　　（B）$\dfrac{4}{3}$；

（C）$-\dfrac{2}{3}$；　　（D）不存在.

（4）　微分方程 $y''+y=x+\sin x$ 的特解形式为（　　）

（A）$y=Ax+B\sin x$　　（B）$y=x(Ax+B)+C\cos x+D\sin x$

（C）$y=Ax+B+C\cos x+D\sin x$　　（D）$y=Ax+B+x(C\cos x+D\sin x)$

（5）　$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 和 $f_y(x_0,y_0)$ 连续是 $f(x,y)$ 在该点处可微的（　　）

（A）充分条件；　　（B）必要条件；

（C）充要条件；　　（D）既不充分也不必要条件.

（6）　以下四结论正确的是（　　　　）

(A) $\displaystyle\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le a^2}(x^2+y^2+z^2)dV=\frac{4}{3}\pi a^5$；

(B) $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=a^2}\left(x^2+y^2+z^2\right)dS=4\pi a^4$；

(C) $\displaystyle\oiint\limits_{x^2+y^2+z^2=a^2\text{外侧}}(x^2+y^2+z^2)dxdy=4\pi a^4$；

(D) $\displaystyle\oiint\limits_{x^2+y^2+z^2=a^2\text{外侧}}(x^2+y^2+z^2)dxdz=4\pi a^4$.

（7）　若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ 收敛，则（　　）

（A）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n+b_n|$ 收敛　　（B）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 都收敛或都发散.

（C）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 都收敛.　　（D）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 中至少有一个收敛.

二、填空题（本题满分 28 分，每小题 4 分）

（8）　由参数方程 $x=\int_0^{2t}\sin u du, y=\int_0^{t^2}e^{-u^2}du$ 所给定的函数 y=y(x) 的导数 $\dfrac{dy}{dx}=$____；

（9）　若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1-ax}-1}{x}, & x<0,\\ ax+b, & 0\le x\le 1,\\ \arctan\dfrac{1}{x-1}, & x>1,\end{cases}$ 为连续函数，则常数 a 与 b 的值为______；

（10）$\int_{-1}^{1}\dfrac{x^2+\sin x}{1+x^2}dx=$______________；

（11）设 $|\vec a|=5,|\vec b|=2,(\widehat{\vec a,\vec b})=\dfrac{\pi}{3}$，则 $\left|(2\vec a-3\vec b)\times(\vec a+2\vec b)\right|=$______________；

（12）设 $u=f(x+z,xy)$ 有二阶连续偏导数，则 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=$______________；

（13）交换二次积分顺序，$\int_0^1dx\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}f(x,y)dy+\int_1^4dx\int_{x-2}^{\sqrt{x}}f(x,y)dy=$______；

（14）将函数 $\dfrac{3x}{x^2+5x+6}$ 展开成 x 的幂级数，则 $\dfrac{3x}{x^2+5x+6}=$__________。

三、解答题：15—22 小题，共 94 分。请将解答写在答题纸指定位置上。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

（15）（本题满分 10 分）计算不定积分 $\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|dx$.

（16）（本题满分 12 分）求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(n\tan\dfrac{1}{n})^{n^2}$.

（17）（本题满分 12 分）求函数 $f(x,y)=x^2-y^2+2$ 在椭圆 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ 上的最大值和最小值.

（18）（本题满分 12 分）设函数 $f(u)$ 连续且恒大于零，$F(t)=\dfrac{\iiint\limits_{\Omega(t)} f(x^2+y^2+z^2)dv}{\iint\limits_{D(t)} f(x^2+y^2)d\sigma}$，

其中 $\Omega(t)=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le t^2\}$，$D(t)=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le t^2\}$。求 $F(t)$ 的定积分表示式，并讨论 $F(t)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内的单调性.

（19）（本题满分 12 分）判别数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)2^n}$ 的敛散性，若收敛求其和.

（20）（本题满分 12 分）设直线 $y=ax\ (0<a<1)$ 与抛物线 $y=x^2$ 所围成的图形面积为 S_1，它们与直线 $x=1$ 所围成的图形面积为 S_2，

(1) 试确定 a 的值，使 S_1+S_2 达到最小，并求出最小值；

(2)求该最小值所对应的平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

（21）（本题满分 12 分）设函数 f 和 g 具有二阶连续导数，且 $f(0)=g(0)=0$，在任一闭曲线 C 上有：$\oint\limits_c [y^2f(x)+2ye^x+2yg(x)]dx+2[yg(x)+f(x)]dy=0$，（1）求 $f(x)$ 和 $g(x)$；（2）计算 $\oint\limits_c [y^2f(x)+2ye^x+2yg(x)]dx+2[yg(x)+f(x)]dy$ 沿任一曲线 C 从点（0,0）到（1,1）的积分.

（22）（本题满分 12 分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x$，求证：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $\int_0^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x=0$.