南京理工大学

2016 年硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：616　　科目名称：数学分析　　满分 150 分

注意：① 认真阅读答题纸上的注意事项；② 所有答案必须写在$\boxed{\text{答题纸}}$上，写在本试题纸或草稿纸上均无效；③ 本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回！

1. 计算题（本题共6小题，每小题8分，满分48分）

(1) 求极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}$。

(2) 求极限 $\lim_{x\to+\infty}(\int_0^x e^{t^2}dt)^{\frac{1}{x^2}}$。

(3) 设 z 是由方程 $x+y-z=e^z$ 所确定的 x 与 y 的函数，求$\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

(4) 计算第一型曲面积分 $\iint_S |xyz|dS$, 其中 S 为 曲面 $z=x^2+y^2$ 介于两平面 $z=0, z=1$ 之间的部分。

(5) 应用格林 $(Green)$ 公式计算 $\oint_C e^x[(1-\cos y)dx-(y-\sin y)dy]$， 其中 C 为由 $0<x<\pi, 0<y<\sin x$ 的正方向的围线。

(6) 设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n\sqrt{n}}, x\in(-\infty,+\infty)$, 计算积分 $\int_0^x S(t)dt$。

2. 计算 $\phi(r)=\int_0^{\infty}e^{-x^2}\cos rx dx$。　(15分)

3. 设 $a_i\geq 0, x_i\geq 0, i=1,2\cdots,n; p>1, q=\frac{p}{p-1}$. 求 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^n a_ix_i$ 在条件 $\sum_{i=1}^n x_i^p=1$ 下的最大值。　(15分)

4. 计算第二型曲面积分 $\int\int_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$, 其中 S 是球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ 并取外侧为正向。　(15分)

5．证明 $f(x)=\cos\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续。　(12分)

6．设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上二次可导，$f''(x)<0$. 证明 $\frac{f(x)-f(0)}{x}$ 在 $(0,a]$ 上单调递减。　(12分)

7. 将函数 $f(x)=(x-1)^2$ 在 $(0,1)$ 上展开成余弦级数， 并由此求出 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$。　(15分)

8. 设 $f(x,y)=|x-y|\phi(x,y)$, 其中 $\phi(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点的一个邻域上有定义，请给函数 $\phi(x,y)$ 加上适当的条件，使得
(1) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续；
(2) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点存在偏导数；
(3) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可微。　(18分)