南京理工大学

2016年硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：611　　科目名称：单独考试数学　　满分：150 分

注意：①认真阅读答题纸上的注意事项；②所有答案必须写在$\boxed{\text{答题纸}}$上，写在本试题纸或草稿纸上均无效；③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回！

一、 填空题（每题 5 分，共 40 分）：

1. 若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2$，则$f(0)=$________，$f'(0)=$________。

2. 已知$f(x)$是连续函数，且$\int_0^x f(x-t)dt=x^3$，则$f(x)=$________。

3. 设A,B均为n阶可逆方阵，则$\begin{pmatrix}0 & A\\ B & 0\end{pmatrix}^{-1}=$________。

4. 设$x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{3^{\frac{k}{n}}}{n}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=$________。

5. 曲线$\begin{cases}x=t^3-3\pi\\ y=t^3-6\arctan t\end{cases}$，则$\dfrac{dy}{dx}=$________。

6. 级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{n-1}{n!}$的和是________。

7. 函数$y=x^x(x>0)$的极小值为________。

8. 曲线$y=\ln x$上曲率最大的点为________。

二、选择题（每题 5 分，共 25 分）：

1. 设函数$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$，则$f(x)$________。

（A）不存在间断点　　（B）存在间断点$x=1$

（C）存在间断点$x=-1$　　（D）存在间断点$x=0$

2. 四维列向量α_1，α_2，α_3线性无关，若向量$\beta_i(i=1,2,3,4)$是非零向量且与向量α_1，α_2，α_3均正交，则向量组β_1，β_2，β_3，β_4的秩为________。

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

3. 设A为$m\times n$阶矩阵，且$rank(A)=m<n$，则下列结论正确的是________。

（A）A的任意m阶子式都不等于零

（B）A的任意m个列向量线性无关

（C）方程组$AX=b$一定有无数个解

（D）矩阵A经过初等行变换一定化为$(E_m\vdots O)$

4. 设空间区域Ω由圆锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$与平面$z=1$围成，则$\iiint\limits_{\Omega}(3x+2y+z)dxdydz=$________。

（A）$\dfrac{\pi}{4}$　　（B）$\dfrac{\pi}{2}$　　（C）π　　（D）2π

5. 设幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(3x+1)^n$在$x=-1$处收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$________。

（A）条件收敛　　（B）绝对收敛　　（C）发散　　（D）敛散性不确定

三、（11 分）设$z=f(x,y)$在点(a,a)的某个邻域内可微，已知$f(a,a)=a$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,a)}=b$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(a,a)}=c$，记$\varphi(x)=f(x,f(x,f(x,x)))$，

（1）计算$\varphi(a)$；　　（2）计算$\left.\dfrac{d}{dx}\varphi^2(x)\right|_{x=a}$。

四、（10 分）设$f(u,v)$有连续偏导数，且满足方程

$f'_u(u,v)+f'_v(u,v)=\sin(u+v)e^{u+v}$，求$y(x)=e^{-2x}f(x,x)$所满足的一阶微分方程，并求其通解。

五、（10 分）设函数$f(x)$连续，且$f(0)=a$，若

$$F(t)=\iiint\limits_{\Omega}[z+f(x^2+y^2+z^2)]dv,$$

其中$\Omega:\sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{t^2-x^2-y^2}$，求$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{F(t)}{t^3}$。

六、（10 分）设xoy平面上有正方形$D=\{(x,y):0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$及直线$l:x+y=t(t\ge 0)$，若$s(t)$表示正方形$D$位于直线$l$左下方部分的面积，试求

积分$\int_0^x s(t)dt(x\geq 0)$的值。

七、（12 分）设二次型

$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3+2ax_2x_3(a<0)$经过正交变换化为标准型$2y_1^2+2y_2^2+by_3^2$。

（1）求常数a,b;　　（2）求正交变换矩阵。

八、（10 分）当常数a取何值时，方程组$\begin{cases}ax_1+(a+3)x_2+x_3=-2,\\ x_1+ax_2+x_3=a,\\ x_1+x_2+ax_3=a^2\end{cases}$无解、有无穷多个解？在有无穷多个解时，求出其通解。

九、（12 分）设$a_1=2,a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)(n=1,2,\cdots)$，证明：

（1）数列$\{a_n\}$收敛；　　（2）级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$收敛。

十、计算题（10 分）设$z=z(x,y)$是由方程

$x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$确定的函数，试求$z=z(x,y)$的极值点和极值。