

2016 年硕士学位研究生入学考试试题

科目代码: 843 科目名称: 量子力学 满分: 150 分

注意: ①认真阅读答题纸上的注意事项; ②所有答案必须写在答题纸上, 写在本试题纸或草稿纸上均无效; ③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回!

一、简答题 (每题 5 分, 共 40 分)

1. 在量子力学中力学量用厄密算符表示, 请问厄密算符有哪些特性?
2. 量子力学博大精深, 内容丰富, 然而它是建立在五条最基本的假设基础上的, 请写出其中任意三条。
3. 请简要阐述量子力学中波函数与经典物理中波函数的区别?
4. 德布罗意认为微观粒子具有波粒二象性, 表现微观粒子具有波动性的德布罗意公式为: _____
5. 写出坐标算符 \hat{x} 与动量算符 \hat{p}_x 的对易关系式及不确定关系式 _____,
6. 若自旋角动量算符为 \hat{S} , 则它满足的对易关系为 _____
7. 写出泡利矩阵 $\hat{\sigma}_x$ 、 $\hat{\sigma}_y$ 、 $\hat{\sigma}_z$ 。
8. 请问什么是全同粒子?

二、证明题 (每题 10 分, 共 20 分)

1. 在一维势场中运动的粒子, 势能具有中心对称性: $U(-x) = U(x)$, 证明粒子的定态波函数具有确定的宇称。
2. $l = r \times p$ 表示轨道角动量, 证明在 l_z 的任何一个本征态下 l_x 和 l_y 的平均值均为 0。

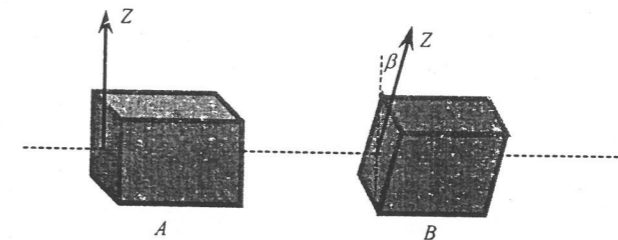
三、计算题 (在以下 8 题中选做 6 题, 每题 15 分, 共 90 分)

1. 已知平面转子的转动惯量为 I , 试利用玻尔-索末菲量子化条件, $\oint pdq = nh (n=0,1,2,\dots)$, 求该转子能量的允许值。
2. 求一维谐振子处在第一激发态时概率最大的位置, 已知第一激发态的波函数为 $\psi(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}}} \cdot 2\alpha x e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2}$ 。
3. 已知氢原子的电子波函数为 $\psi_{nlm}(r, \theta, \phi, s_z) = \sqrt{\frac{1}{4}} R_{31}(r) Y_{11}(\theta, \phi) \chi_{1/2}(s_z) + \sqrt{\frac{3}{4}} R_{32}(r) Y_{20}(\theta, \phi) \chi_{-1/2}(s_z)$ 。求在 ψ 态中测量氢原子能量 E 、 L^2 、 L_z 、 s^2 、 s_z 的可能值和这些力学量的平均值。

4. 一个粒子处于自旋态 $\chi = A \begin{pmatrix} 3i \\ 4 \end{pmatrix}$

- (1) 求出归一化系数 A 。
- (2) 求出 S_x, S_y, S_z 的期望值。
- (3) 求出 S_x, S_y, S_z 的不确定度 (标准偏差) $\sigma_{S_x}, \sigma_{S_y}, \sigma_{S_z}$ (例 $\sigma_{S_x} = \sqrt{\langle S_x^2 \rangle - \langle S_x \rangle^2}$)。
- (4) 证明结果符合不确定性原理, 即证明 $\sigma_{S_x} \sigma_{S_y} \geq \frac{\hbar}{2} |\langle S_z \rangle|$, $\sigma_{S_y} \sigma_{S_z} \geq \frac{\hbar}{2} |\langle S_x \rangle|$, $\sigma_{S_z} \sigma_{S_x} \geq \frac{\hbar}{2} |\langle S_y \rangle|$ 。

5. 一束自旋 1/2 的粒子通过 Stern-Gerlach 装置 (第一个装置 A), 按照粒子的量子数 m_s 的不同, 入射粒子束被分裂成两束。移去其中一束, 让另一束再通过类似的装置 (第二个装置 B)。第二个装置 B 的磁场相对于第一个装置 A 有倾斜角 β , 离开第二个装置 B 后两束粒子相对数目是多少?



6. 一个处在一维无限深势阱中的粒子，其初始波函数是

$$\Psi(x,0) = \begin{cases} Ax & (0 \leq x \leq w/2) \\ A(w-x) & (w/2 \leq x \leq w) \end{cases}$$

(已知一维无限深势阱的定态波函数为 $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{w}} \sin(\frac{n\pi x}{w})$ ($0 < x < w$))。

$$\left(\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}, n \text{ 为奇数} \right)$$

- ① 求归一化系数 A。
- ② 求出 $\Psi(x,t)$ 。
- ③ 求测量能量得到的结果为 E_1 (基态能量) 的概率为多少?
- ④ 求出能量的平均值。

7. 已知在 \hat{L}^2 和 \hat{L}_z 的共同表象中，算符 \hat{L}_x 的矩阵为

$$L_x = \frac{\hbar\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 求它的本征值和本征函数。}$$

8. 氢原子处在基态 $\psi(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-\frac{r}{a_0}}$ ，求在此态中： r 的平均值；

势能 $-\frac{e^2}{r}$ 的平均值；动量概率分布函数。 $(\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}})$