南京理工大学

2019 年硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：615　　科目名称：高等数学　　　满分：150 分

注意:①认真阅读答题纸上的注意事项；②所有答案必须写在答题纸上，写在本试题纸或草稿纸上均无效；③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回！

一、选择题（本题满分 28 分，每小题 4 分）

（1）$x=1$是函数 $f(x)=\dfrac{x\arctan\frac{1}{x-1}}{\sin\frac{\pi x}{2}}$ 的（　　）间断点；

（A）连续点；　（B）可去间断点；

（C）跳跃间断点；　（D）第二类间断点.

（2）函数 $f(x)=x^2-\ln x^2$ 的单调增加区间为（　）；

（A）$(-1,0)\cup(1,+\infty)$；　（B）$(-1,+\infty)$；

（C）$(-\infty,-1)\cup(0,1)$；　（D）$(-\infty,1)$.

（3）设 $I=\dfrac{1}{s}\int_0^{st} f(t+\dfrac{x}{s})dx$（$s>0$，$t>0$），则 I 之值依赖于（　）；

（A）s,t,x；　（B）s,t；

（C）t；　（D）s,x.

（4）过三点 $M_1(1,1,1)$，$M_2(1,0,-1)$，$M_3(0,2,1)$ 的平面方程是（　　）；

（A）$2x+2y-z-3=0$；　（B）$2x-2y-z+1=0$；

（C）$-2x+2y+z+3=0$　（D）$2x+2y+z+5=0$.

（5）已知函数 $y=y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y=\dfrac{y\Delta x}{1+x^2}+\alpha$，且 $\alpha=o(\Delta x), y(0)=\pi$，

则 $y(1)=$（　）；

（A）2π；　（B）π；

（C）$e^{\frac{\pi}{4}}$；　（D）$\pi e^{\frac{\pi}{4}}$.

（6）改变积分顺序 $\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy+\int_1^{\sqrt{2}} dx\int_0^{2-x^2} f(x,y)dy=$（　　）；

（A）$\int_0^{\sqrt{2}} dx\int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{2-x}} f(y,x)dy$；　（B）$\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)dx$；

（C）$\int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{2-x}} dy\int_0^{\sqrt{2}} f(x,y)dx$；　（D）$\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y}} dx\int_0^1 f(x,y)dy$.

（7）下列级数中收敛的是（　　）；

（A）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\tan\dfrac{1}{n}$；　（B）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n-\sqrt{n}}{2n-1}$；　（C）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{3^n}$；　（D）$\sum\limits_{n=3}^{\infty}(-1)^{n-1}\tan\dfrac{\pi}{n}$.

二、填空题（本题满分 28 分，每小题 4 分）

（8）已知 $\lim\limits_{x->0}\dfrac{\sin 2x+xf(x)}{x^3}=0$，则 $\lim\limits_{x->0}\dfrac{2+f(x)}{x^2}=$________；

（9）已知 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-x-6}$，则 $f^{(100)}(0)=$________；

（10）设 $f(x)$ 是连续函数，且 $f(x)=\sqrt{1-x^2}+2\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$，则 $f(x)$ 为________；

（11）函数 $u=\ln(x^2+y^2)$ 在点 $M(3,4)$ 处沿梯度方向的方向导数是________；

（12）已知 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 2y\}$，二重积分 $\iint\limits_D (x+1)dxdy=$________；

（13）设 $(6xy^2-y^3)dx+(6x^2y-axy^2)dy$ 是某一函数 $u(x,y)$ 的全微分，则 $a=$________；

（14）函数 $f(x)=\dfrac{1}{4x-1}$ 展开为 $(x+1)$ 的幂级数为 $f(x)=$________，收敛域为________.

三、解答题

（15）（本题满分 10 分）试求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)$.

（16）（本题满分 12 分）已知 $y=\int_1^{1+\sin t}\left(1+e^{\frac{1}{u}}\right)\mathrm{d}u$，其中 $t=t(x)$ 由 $\begin{cases}x=\cos 2v,\\ t=\sin v\end{cases}$ 确定，

求 $\dfrac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}x^2}$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

（17）（本题满分 12 分）设 $f(\ln x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$，求 $\int f(x)dx$.

(18)（本题满分 12 分）计算 $\iint\limits_{\Sigma} xy^2dydz + x^2ydzdx + zdxdy$，其中 Σ 为曲面 $z = x^2 + y^2$ 被平面 $z = 1$ 所截下的下面部分取下侧.

(19)（本题满分 12 分）求椭圆 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ 上点到原点的距离的最大最小值及椭圆面积.

(20)（本题满分 12 分）设一元函数 $u = f(r)$ 当 $0 < r < +\infty$ 时有连续的二阶导数，

$u = f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$，试计算 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. 若 $f(1) = 0, f'(1) = 1$，并且

$u = f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$ 满足方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$，试求出 $f(r)$ 的表达式.

(21)（本题满分 12 分）设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且

$f(a)\cdot f(b) > 0$，$f(a)\cdot f(\dfrac{a+b}{2}) < 0$，试证明至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使得

$f'(\xi) = f(\xi)$.

(22)（本题满分 12 分）设 $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$，计算 $a_n + a_{n-2}$，并证明：对任意确定的常数 $\lambda > 0$, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{n^{\lambda}}$ 收敛.