南京理工大学

2021 年硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：840　　科目名称：高等代数　　满分：150 分

注意：①认真阅读答题纸上的注意事项；②所有答案必须写在答题纸上，写在本试题纸或草稿纸上均无效；③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回！

符号: E 表示单位矩阵. $|A|$ 表示矩阵 A 的行列式. A^T 表示矩阵 A 的转置矩阵. A^* 表示矩阵 A 的伴随矩阵. $r(A)$ 表示矩阵 A 的秩.

一、填空题(每题 5 分, 共 30 分):

1. 行列式 $D = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & b & 0 & 0 \\ 1 & 0 & c & 0 \\ 1 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} =$________.

2. 设 A 是 2 阶矩阵, ξ_1, ξ_2 为线性无关的 2 维列向量, $A\xi_1 = -\xi_2$, $A\xi_2 = 2\xi_1 + 3\xi_2$, 则 A 的特征值为________.

3. 设 A 为 3 阶方阵, 若 $|A| = 2$, 则 $|4A^{-1} - A^*| =$________.

4. 设线性方程组
$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$
有三个线性无关的解, 则 λ 取何值________.

5. 多项式 $f(x) = x^4 - 4x^3 + 1$ 和 $g(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ 的最大公因式为________.

6. 设 a 是实数, 若二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_2x_3$ 负定, 则 a 的取值范围是________.

二、(10 分) 证明: 若 $(x-1)|f(x^n)$, 则 $(x^n - 1)|f(x^n)$.

三、(15 分) 设 A, B, C 是 n 阶方阵, 证明:

(1) $r(AB) = r(B)$ 的充要条件为 $ABx = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解;

(2) 若 $r(AB) = r(B)$, 则 $r(ABC) = r(BC)$.

四、(10 分) 设 A 是 n 阶矩阵且 $A^2 - A + E = 0$. 证明: 对任意实数 k, $A + kE$ 都是可逆矩阵.

五、(10 分) 设 A 是一个三阶实对称矩阵且 1 是 A 的 2 重特征值, 且 $(1,1,1)^T$, $(1,1,0)^T$ 是 A 的两个特征向量. 如果 A 的行列式 $|A|$ 等于 4, 求 A.

六、(10 分) 设 A, B 是正定矩阵且 $AB = BA$, 证明: AB 是正定矩阵.

七、(10 分) 设 T 是欧氏空间 V 上的正交变换, 令
$$V_1 = \{x \in V : Tx = x\}, \quad V_2 = \{x - Tx : x \in V\}.$$
证明: V_1 是 V_2 的正交补.

八、(15 分) 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 是线性空间 V 的一组基, f_1, f_2, f_3 是它的对偶基, 令
$$\xi_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2,\ \xi_2 = \varepsilon_2 + \varepsilon_3,\ \xi_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_3.$$
证明 ξ_1, ξ_2, ξ_3 是 V 的一组基, 并求它的对偶基.

九、(20 分) 设二次曲面方程 $2x_1^2 + ax_2^2 + bx_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3 = 2$(其中 $a \geq 0$, $b \geq 0$)可通过正交变换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ 化为椭圆柱面方程 $y_1^2 - 2y_2^2 + 4x_3^2 = 2$.

(1) 求 a, b 的值;

(2) 求正交矩阵 T.

十、(20 分) 设 ξ 是 n 维欧氏空间 V 中的一个单位向量, 定义 V 上的一个线性变换如下:
$$A(\alpha) = \alpha - 2(\xi, \alpha)\xi, \quad (\forall \alpha \in V),$$
并称 A 为 V 上的一个镜面反射.

(1) A 为第二类的正交变换;

(2) 若 B 是 V 上的一个正交变换, 则 B 是一个镜面反射的充要条件为 1 是 B 的 $n-1$ 重特征值.