南京理工大学

2017年硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：840　　科目名称：高等代数　　满分：150分

注意：(1) 认真阅读答题纸上的注意事项；(2) 所有答案必须写在答题纸上，写在本试题纸或草稿纸上均无效；(3) 本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回！

一．填空题（本题共6小题，每小题5分，共30分）

1. 关于x的方程$\begin{vmatrix} 0 & a_1-x & a_2-x \\ -a_1-x & 0 & a_3-x \\ -a_2-x & -a_3-x & 0 \end{vmatrix}=0$有重根的充分必要条件是__________.

2. 设A和B均为可逆矩阵，则分块矩阵$X=\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$的逆矩阵为__________.

3. 若4阶方阵A与B相似，而矩阵A的特征值为2, 3, 4, 5，则$|B^{-1}-E|=$__________.

4. 设A为1×3矩阵，且线性方程组$Ax=0$以$\xi_1=(1,0,1)'$，$\xi_2=(0,1,-1)'$为基础解系，则$A=$__________.

5. 二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(-2x_1+x_2+x_3)^2+(x_1-2x_2+x_3)^2+(x_1+x_2-2x_3)^2$的规范形为__________.

6. 已知P^3中的线性变换定义如下：$\mathcal{A}(a,b,c)=(a+2b-c,b+c,a+b-2c)$，则$\dim(\mathcal{A}P^3)=$__________.

二．（本题满分10分）设$f(x)=2x^3+(1+2t)x^2+2x+u$，$g(x)=x^3+tx^2+u$的最大公因式是一个二次多项式，求t,u的值.

三．（本题满分10分）已知

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=1,\quad \begin{vmatrix} a_{11}+2 & a_{12}+2 & a_{13}+2 \\ a_{21}+2 & a_{22}+2 & a_{23}+2 \\ a_{31}+2 & a_{32}+2 & a_{33}+2 \end{vmatrix}=-2,$$

计算行列式$\begin{vmatrix} a_{11}-a_{12} & a_{12}-a_{13} & 1 \\ a_{21}-a_{22} & a_{22}-a_{23} & 1 \\ a_{31}-a_{32} & a_{32}-a_{33} & 1 \end{vmatrix}$.

四．（本题满分10分）设α是n维列向量，且$\alpha^T\alpha=1$，$A=E-\alpha\alpha^T$，这里E是n阶单位矩阵. 证明：$r(A)<n$. 若$r(A)=n-1$，求方程组$Ax=0$的通解.

五．（本题满分15分）设A是一个n阶方阵，且$r(A+E)+r(A+2E)=n$，证明：$A^2+3A+2E=0$.

六．（本题满分15分）设A是一个$m\times n$实矩阵，且$r(A)=n$. 证明：$A'A$正定.

七．（本题满分15分）设α是欧氏空间V中的一个非零向量，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\in V$满足

(1) $(\alpha,\beta_i)>0\ (i=1,2,\cdots,n)$;

(2) $(\beta_i,\beta_j)\le 0\ (i,j=1,2,\cdots,n,\ i\ne j)$.

证明：向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$线性无关.

八．（本题满分15分）设$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$.

(1) 已知A的一个特征值为1，求x.

(2) 求正交矩阵P，使得$(AP)'(AP)$为对角矩阵.

九．（本题满分15分）设α,β是欧氏空间V中的两个不同的单位向量. 证明：存在第二类正交变换$\mathcal{A}$，使得$\mathcal{A}\alpha=\beta$.

十．（本题满分15分）设V是复数域上的线性空间，其维数$n\ge 2$，$f(\alpha,\beta)$是V上的一个对称双线性函数.

(1) 证明：V中存在非零向量ξ，使得$f(\xi,\xi)=0$.

(2) 证明：如果$f(\alpha,\beta)$是非退化的，则必存在线性无关的向量ξ,η，满足

$$f(\xi,\eta)=1,f(\xi,\xi)=f(\eta,\eta)=0.$$