

科目代码: 616

科目名称: 数学分析

满分 150 分

注意: ① 认真阅读答题纸上的注意事项; ② 所有答案必须写在答题纸上, 写在本试题纸或草稿纸上均无效; ③ 本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回!

1. 计算题 (本题共6小题, 每小题10分, 满分60分)

(1) 求极限 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\int_0^t \sin(tx^2) dx}{t^4}$.

(2) 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 50$ 与锥面 $x^2 + y^2 = z^2$ 所截出的曲线在 $(3, 4, 5)$ 处的切线和法平面方程。(3) 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ 的和。(4) 计算第二型曲线积分 $\int_L xy dx + (x-y) dy + x^2 dz$, 其中 L 为螺旋线: $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt$ 从 $t=0$ 到 $t=\pi$ 上的一段。(5) 求函数 $z = 3axy - x^3 - y^3$ ($a > 0$) 的极值点。(6) 求广义积分 $\int_0^1 (\ln \frac{1}{x})^5 dx$.2. 设 $a > 0, \sigma > 0, a_1 = \frac{1}{2}(a + \frac{\sigma}{a}), a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{\sigma}{a_n}), n = 1, 2, \dots$ 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛并求其极限。(15分)

3. 计算曲面积分

$$\iint_S \sin^4 x dy dz + z^2 dx dy,$$

其中 S 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1 (z \geq 0)$, 方向取上侧。(15分)4. 设 $a > 0, b > 0$, 函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内可导, 且 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = B$, 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$\frac{aB - bA}{a - b} = f(\xi) - \xi f'(\xi). \quad (15分)$$

5. 设

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0, \end{cases}$$

证明: $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处连续但不可微。(15分)6. 将函数 $f(x) = 3x^2 - 6\pi x$ 在 $[0, \pi]$ 上展开成余弦级数, 并由此证明 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{1}{12}(3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2), x \in [0, \pi]$ 。(15分)7. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上存在二阶连续的导数, 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在, 且 $f''(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有界。证明: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ 。(15分)