南京理工大学

2017 年硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：615　　科目名称：高等数学　　满分：150 分

注意：①认真阅读答题纸上的注意事项；②所有答案必须写在答题纸上，写在本试题纸或草稿纸上均无效；③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回！

一、选择题（本题满分 28 分，每小题 4 分）

(1) $x=0$ 是函数 $\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}+\dfrac{x}{\sin x}$ 的（　　）间断点；

(A) 连续点；　　(B) 跳跃间断点；

(C) 可去间断点；　　(D) 第二类间断点.

(2) $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上是 $f(x)$ 的原函数，则下列式子正确的是（　　）；

(A) $\int df(x)=F(x)+c$；　　(B) $d\int f(x)dx=F(x)dx$；

(C) $\int f(x)dx=F(x)+c$；　　(D) $\int F(x)dx=f(x)+c$.

(3) 设 $f(x)$ 是以 2 为周期的偶函数，且当 $0\le x\le 1$ 时 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$，

则 $\int_0^3 f(x)dx=$（　　）；

(A) $\dfrac{3}{2}\pi$；　　(B) $\dfrac{4}{3}\pi$；

(C) $\dfrac{2}{3}\pi$；　　(D) $\dfrac{3}{4}\pi$.

(4) 函数 $y=C_1+C_2x-\sin x$ 是微分方程 $y''=\sin x$ 的（　　）；

(A) 特解；　　(B) 通解；

(C) 是解但不是通解；　　(D) 不是解.

(5) 二元函数 $f(x,y)$ 在（0,0）处可微的一个充分条件是（　　）；

(A) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$；　　(B) $\lim\limits_{y\to 0}[f_y(0,y)-f_y(0,0)]=0$；

(C) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}[f(x,y)-f(0,0)]=0$；　　(D) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{x}=0$.

(6) 改变积分顺序 $\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy+\int_1^{\sqrt{2}} dx\int_0^{2-x^2} f(x,y)dy=$（　　）；

(A) $\int_0^{\sqrt{2}} dx\int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{2-x}} f(y,x)dy$；　　(B) $\int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{2-x}} f(x,y)dy\int_0^{\sqrt{2}} dx$；

(C) $\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)dx$；　　(D) $\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)dx\int_0^1 dy$.

(7) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 是一级数，$\{S_n\}$ 是其部分和数列，则 $\{S_n\}$ 有界是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛的（　　）.

(A) 必要条件；　　(B) 充分条件；

(C) 充要条件；　　(D) 既不充分，也不必要.

二、填空题（本题满分 28 分，每小题 4 分）

（8）设 $y=y(x)$ 是由方程 $\int_0^{xy} e^{t^2}dt+ye^x=2$ 所确定的隐函数，则 $\dfrac{dy}{dx}|_{x=0}=$____；

（9）函数 $\dfrac{1}{2+x}$ 的 n 阶麦克劳林展开式(带皮亚诺型余项)为_____；

（10）曲线 $y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\sqrt{\cos t}\,dt\quad(-\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2})$ 弧长为_____；

（11）曲面 $z=x^4+xy+y^4$ 在点 $(1,1,3)$ 处的切平面的方程为_____；

（12）设 Σ：$x^2+y^2+z^2=a^2$．则积分 $\oiint\limits_{\Sigma} z^2dS=$_____；

（13）方程 $y'+xy=0$ 的通解是_____；

（14）设 $f(x)$ 以 2π 为周期，且在 $(-\pi,\pi]$ 上有 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x<0\\ 1+x^2, & 0\le x\le\pi\end{cases}$，则 $f(x)$ 的傅里叶级数的和函数在 $x=\pi$ 处收敛于_____.

三、解答题（本题满分 94 分）

（15）（本题满分 10 分）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\sin x}{x})^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

（16）（本题满分 12 分）计算定积分 $\int_0^1 x(\arctan x)^2dx$.

（17）（本题满分 12 分）求原点到曲面 $z^2=xy-2$ 的最短距离.

（18）（本题满分 12 分）计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+5xy^2\sin\sqrt{x^2+y^2})dxdydz$，其中 Ω 由曲面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$，$z=1$ 和 $z=4$ 所围成区域.

（19）（本题满分 12 分）求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}n(n-1)x^n$ 的收敛域及和函数，并求数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n)}{2^n}$ 的和.

（20）（本题满分 12 分）计算 $\oint\limits_{L}\frac{xy^2dx+(xy+x^3)dy}{|x|+|y|}$，其中 L 是以 $A(1,0),B(0,1),C(-1,0),D(0,-1)$ 为顶点的正方形的正向边界.

（21）（本题满分 12 分）

（1）证明当 $x>0$ 时，不等式 $x-\frac{1}{2}x^2<\ln(1+x)<x$ 成立；

（2）求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2k}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\left(1+\frac{4}{n^2}\right)\left(1+\frac{6}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{2n}{n^2}\right)$.

（22）（本题满分 12 分）

（1）设 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续，在 $(1,2)$ 内可导，$f(2)-2f(1)=0$，证明在 $(1,2)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=\xi f'(\xi)$；

（2）设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有连续的导数，且 $|f(x)-f'(x)|\le 1$（$\forall x\in(0,+\infty)$），$f(0)=0$，证明：$|f(x)|\le e^x-1$（$\forall x\in[0,+\infty)$）.