南京理工大学

2014年硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：616　　科目名称：数学分析　　　　满分：150分

注意：①认真阅读答题纸上的注意事项；②所有答案必须写在答题纸上，写在本试题纸或草稿纸上均无效；③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回！

一. 基本计算题或证明题（本题共 84 分，每小题 7 分）

（1） 设 $m \le n$，且 $a_m \ne 0$，$a_n \ne 0$，求极限

$\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{a_0+a_1k+\cdots a_mk^m}{b_0+b_1k+\cdots+b_nk^n}$。

（2）给定自然数 $n>1$，计算函数 $y=x^2e^x$ 的 n 阶导数，即 $y^{(n)}$。

（3）给定三元函数 $y=2x^2y+5xyz^3+yz+4$，计算该函数在点（1，2，1）处下降最快的方向。

（4）求极限（不能用洛必达法则，否则不得分）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-x^2/2}}{3x^6+2x^5+x^4}$

（5）讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 的敛散性，并证明。

（6）验证曲线积分 $\int_L (y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz$ 与路径无关，并求被积表达式的原函数 $u(x,y,z)$。

（7）按定义（$\varepsilon-\delta$ 语言）证明极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}\left(3x^2+4xy-2y^2\right)=3$。

（8）已知函数 $f(x)=\sqrt{4x^2-3x+1}$ 有倾斜渐近线，求出该渐近线，要求写出渐近线直线方程。

（9）求出反正切函数 $\arctan x$ 的麦克劳林级数。

（10）求椭球面 $x^2+2y^2+3z^2=6$ 在 $(1,1,1)$ 处的切平面方程与法线方程。

（11）不用计算器等附加设备，直接计算定积分 $\int_0^1\dfrac{\sin x}{x}dx$ 的近似值，精确到 10^{-4}。

（12）求球体 $x^2+y^2+z^2\le 4a^2$ 被圆柱面 $x^2+y^2=2ax$ 所截部分的体积。

二. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，记

$S_n=\max\{a_n,b_n\}$，$T_n=\min\{a_n,b_n\}$，$n=1,2,\cdots$

证明：$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\max\{a,b\}$，$\lim\limits_{n\to\infty}T_n=\min\{a,b\}$（9 分）

三. 设R^n表示n维向量空间，对于$D\subset R^n$，如果对任意向量$x,y\in D$以及任意的实数$\alpha\in[0,1]$有$\alpha x+(1-\alpha)y\in D$，则称集合 D 是凸集。

（1）证明：对于任意给定$m\times n$阶矩阵$A\in R^{m\times n}$，m维向量$b\in R^m$，n维未知向量$x\in R^n$，线性方程组$Ax=b$的解集$S=\{x\in R^n / Ax=b\}$是凸集。

（2）证明（根据上面凸集的定义）：设$D\subset R^n$是任一凸集，对任意r个点，$x^k\in D$（$k=1,2,\cdots,r$），任意r个实数$\alpha_k\in[0,1]$（$k=1,2,\cdots,r$）满足$\sum\limits_{k=1}^{r}\alpha_k=1$，恒有$\sum\limits_{k=1}^{r}\alpha_k x^k\in D$成立。（10 分）

四. 曲线的弯曲程度有着非常重要的应用意义，如铁路弯道的设计。曲线平均弯曲程度 K 被定义为动点沿着曲线从定点 P 移至 Q 时切线倾角的增量$\Delta\alpha$与经过的弧线$\overrightarrow{PQ}$的长度Δs之比，即$K=\left|\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$。如果另外还存在有限的极限

$K=\left|\lim\limits_{\Delta s\to 0}\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|=\left|\dfrac{d\alpha}{ds}\right|$，则称此极限$K$为给定曲线在点$P$处的曲率。请回答问题：

（1）在二维平面上推导曲率的计算公式。

（2）给出平面上函数$y=f(x)$，直线，圆的曲率公式或曲率值。

（3）求出椭圆上曲率最大和最小的点。（15 分）

五. 求一均匀球壳（密度ρ为常数）对不在该球壳上的一质点 M（质量为 1）的引力。（15 分）

六. 证明黎曼引理：设函数$\psi(u)$在区间$[a,b]$上可积和绝对可积，则

$\lim\limits_{p\to\infty}\int_a^b\psi(u)\sin pudu=0$，$\lim\limits_{p\to\infty}\int_a^b\psi(u)\cos pudu=0$。（10 分）

七. 证明，如果$f(x)$在(a,b)上单调递增，那么对$\forall x\in(a,b)$，$f(x+)$与$f(x-)$（右与左极限）都存在，更确切些，$\sup\limits_{a<t<x}f(t)=f(x-)\le f(x)\le f(x+)=\inf\limits_{x<t<b}f(t)$。此外，如果$a<x<y<b$，那么$f(x+)\le f(y-)$（7 分）