

2015 年硕士学位研究生入学考试试题

科目代码: 611 科目名称: 单独考试数学 满分: 150 分

注意: ①认真阅读答题纸上的注意事项; ②所有答案必须写在答题纸上, 写在本试题纸或草稿纸上均无效; ③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回!

一. 填空题 (每小题 5 分, 共 25 分)

1. 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2a}{x-a} \right)^x = 8$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 设 $f(x)$ 有一个原函数 $\frac{\sin x}{x}$, 则 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x f'(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 曲面 $\cos(\pi x) - x^2 y + e^{xz} + yz = 4$ 在点 $(0, 1, 2)$ 的法线方程是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

4. 将 $f(x) = \frac{1}{1+x}$ ($-1 < x < 3$) 展开成 $x-1$ 的幂级数是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

5. 若二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + 2t x_1 x_2 + 2x_1 x_3$ 是正定的, 则 t 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

二. 选择题 (每小题 5 分, 共 25 分)

1. 下列广义积分发散的是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(A) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sin x} dx$

(B) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

(C) $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$

(D) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx$

2. 已知方程 $xy'' + y' = 4x$ 的一个特解是 x^2 , 且对应的齐次方程 $xy'' + y' = 0$ 有一个特解 $\ln x$, 则原方程的通解是 $y = \underline{\hspace{2cm}}$.

(A) $C_1 \ln x + C_2 + x^2$

(B) $C_1 \ln x + C_2 x + x^2$

(C) $C_1 \ln x + C_2 e^x + x^2$

(D) $C_1 \ln x + C_2 e^{-x} + x^2$

3. 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某领域内连续, 且 $f(0)=0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1-\cos x} = 2$, 则在 $x=0$

处关于 $f(x)$ 的说法正确的是 $\underline{\hspace{2cm}}$.(A) 不可导 (B) 可导且 $f'(0) \neq 0$

(C) 取得极大值 (D) 取得极小值

4. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的秩是 r , 则下列说法正确的是 $\underline{\hspace{2cm}}$.(A) 必定 $r < s$ (B) 向量组中任意小于 r 个向量的部分组线性无关(C) 向量组中任意 r 个向量线性无关(D) 向量组中任意 $r+1$ 个向量线性相关5. 设函数 $z = f(x, y)$, 若 $f(x, 0) = 1$, $f'_y(x, 0) = x$, 且 $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$, 则 $f(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$.(A) $1 - xy + y^2$ (B) $1 + xy + y^2$ (C) $1 - x^2 y + y^2$ (D) $1 + x^2 y + y^2$ 三. (10 分) 设 $f(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2} dt$, 试求(1) 函数 $f(x)$ 的极值;(2) 积分 $\int_{-2}^3 x^2 f'(x) dx$ 的值.四. (8 分) 设 $z = x^2 y f(xy, g(x, y))$, $y = \varphi(x)$, 其中 f, g, φ 均可微, 试求 $\frac{dz}{dx}$.五. (8 分) 计算 $\iint_D x^2 e^{-y^2} dx dy$ 的值, 其中 D 是以点 $(0,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$ 为顶点的三角形区域.六. (12 分) 当 a, b 取何值时, 方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + ax_3 = b \end{cases}$ 无解, 有唯一解, 有无穷多解? 并在有解时求出所有解.七. (8 分) 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$ 的和.八. (12 分) 过原点作曲线 $y = e^{\frac{x}{2}}$ 的切线 L , 该切线与曲线 $y = e^{\frac{x}{2}}$ 及 y 轴围成平面图形 D ,(1) 求切线 L 的方程;(2) 求 D 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积.

九. (10 分) 在椭球面 $2x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上, 求与平面 $2x + y - z = 6$ 的最远距离和最近距离。

十. (8 分) 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关, 向量 β_1 可由它们线性表示, 向量 β_2 不能由它们线性表示, 试证明: 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \lambda\beta_1 + \beta_2$ (λ 是常数) 线性无关。

十一. (12 分) 若已知函数 $u = u(x^2 - y^2)$ 有连续的二阶偏导数, 且满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (x^2 + y^2)u, \text{ 试求函数 } u \text{ 的表达式。}$$

十二. (12 分) 已知函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0, f(1) = 1$, 证明:

(1) 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f(\xi) = 1 - \xi$;

(2) 存在两个不同的 $x_1, x_2 \in (0, 1)$, 使得 $f'(x_1)f'(x_2) = 1$ 。